Lycée Blaise Pascal

Mathématiques supérieures et spéciales

GENERALITES
Cours

Mathématiques supérieures **Mme Sandré**

A - ANALYSE DIMENSIONNELLE 4

1 - LES DIMENSIONS DE BASE 4
2 - LES GRANDEURS SECONDAIRES 4

B - VARIATION, ERREUR ET INCERTITUDES 6

1 - VARIATION 6
a) Définition 6
b) Exemple 6
c) Calcul de variation dans deux cas simples 6
2 - ERREUR 7
a) Définition 7
b) Exemple 8
c) Calcul d'erreur dans deux cas simples 8
3 - INCERTITUDES 8
a) Définition 8
b) Incertitude sur une mesure indirecte 9
c) Présentation du résultat d'une mesure 9
d) Comparaison de deux résultats expérimentaux 9

C - DIFFERENTIELLES, CALCULS D'INCERTITUDES ET DEVELOPPEMENTS LIMITES 10

1 - FONCTION D'UNE VARIABLE 10
a) Différentielle 10
b) Petite variation 10
c) Dérivée et différentielle logarithmique 11
2 - FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES 11
a) Dérivée partielle 11
b) Différentielle totale 11
c) Théorème de Schwartz 12
d) Différentielle 13
3 - CALCUL D'INCERTITUDE 13
a) Incertitude absolue sur une mesure indirecte 13
b) Incertitude relative sur une mesure indirecte 14
c) Exemple 14
4 - DEVELOPPEMENT LIMITE 15

A - ANALYSE DIMENSIONNELLE

1 - Les dimensions de base

Equation en dimension d'une vitesse :

$$v = LT^{-1}$$

Toutes équations en dimension nécessitent cinq dimensions de base. Arbitrairement :

Longueur	L
Temps	T
Masse	M
Intensité électrique	I
Température thermodynamique	θ

2 - Les grandeurs secondaires

Equation en dimension :

Surface	$[s] = L^2$
Volume	$[V] = L^3$
Vitesse	$[v] = L\ T^{-1}$
Accélération	$[a] = L\ T^{-2}$
Force	$[F] = M\ L\ T^{-2}$
Travail	$[W] = M\ L^2\ T^{-2}$
Puissance	$[P] = M\ L^2\ T^{-3}$
Tension électrique	$[U] = M\ L^2\ T^{-3}\ I$
Capacité thermodynamique	$[\mu] = [W]\ \theta^{-1} = M\ L^2\ T^{-2}\ \theta^{-1}$

Remarque :

1. des grandeurs différentes peuvent avoir la même équation en dimension
   ex : le moment et le travail d'une force
2. Il y a des grandeurs sans dimension
   ex : densité, indice de réfraction quelques unes n'ont pas d'unité, d'autres en ont (les angles)
3. Vérification de l'homogénéité d'une formule

On ne peut ajouter deux grandeurs ayant des équations en dimension différentes

$$\left.\begin{matrix} X+Y \\ X=Y \end{matrix}\right\} \text{ X et Y ont la même dimension}$$

$$\left.\begin{matrix} e^{x} \\ 10^{x} \\ \ln(x) \end{matrix}\right\} \text{ X est sans dimension}$$

On note par exemple

$$pH = \ln\left(\frac{[H_3O^+]}{1 \text{ mol.L}^{-1}}\right)$$

B - VARIATION, ERREUR ET INCERTITUDES

1 - Variation

a) Définition

Considérons une grandeur *x*, prenant une valeur initiale x_i et une valeur finale x_f. La variation de x est

$$\boxed{\delta x = x_f - x_i}$$

δx est une grandeur algébrique de même dimension que *x*

La variation relative notée

$$\boxed{\frac{\delta x}{x} = \frac{x_f - x_i}{x_i}}$$

On utilise ceci quand δx n'est pas grand devant x_i. Autrement dit, $x_i \approx x_f$. $\frac{\delta x}{x}$ est une grandeur algébrique sans dimension donnée en pourcentages le plus souvent

b) Exemple

Une règle métallique a une longueur L_0 et une température $\theta_0 = 0°C$. A une température θ, sa longueur est $L = L_0(1 + a.\theta)$ où $[a] = \theta^{-1}$

Variation de L si θ varie de 0 à θ_1

$\delta L = L_0(1 + a.\theta_1) - L_0 = L_0.(a.\theta_1)$

Remarque : a θ_1 est sans dimension : la formule est homogène

Variation relative de L

$$\frac{\delta L}{L} = L_0.\frac{a.\theta_1}{L_0} = a.\theta_1$$

c) Calcul de variation dans deux cas simples

cas 1 : $x = \alpha.a + \beta.b + \gamma.c$

α, β, γ sont des constantes fixes

a, *b*, *c* sont des variables qui subissent les variations δa, δb, δc

quel est la variation de *x* ?

valeur initiale : $x_i = \alpha.a_i + \beta.b_i + \gamma.c_i$

valeur finale : $x_f = \alpha.(a_i + \delta a) + \beta.(b_i + \delta b) + \gamma.(c_i + \delta c)$

d'où

$$\boxed{\delta x = \alpha.\delta a + \beta.\delta b + \gamma.\delta c}$$

cas 2 : $x = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$

α, β, γ fixes

a, b, c variables

ex : $x = a.b$

$x_i = a_i.b_i$

$x_f = (a_i + \delta a).(b_i + \delta b)$

$\delta x = a_i.\delta b + b_i.\delta b + \delta a.\delta b$

$\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta b}{b_i} + \frac{\delta a}{a_i} + \frac{\delta a}{a_i}.\frac{\delta b}{b_i}$

Si $\frac{\delta b}{b_i}$ et $\frac{\delta a}{a_i} < 10\%$, alors $\frac{\delta a}{a_i}.\frac{\delta b}{b_i} < 1\%$ est négligeable devant les autres termes.

$$\boxed{\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta a}{a_i} + \frac{\delta b}{b_i}}$$

Dans le cas général où $x = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$ où α, β, γ sont fixes, si a, b et c subissent des variations relatives petites devant 1, on peut démontrer que

$$\boxed{\frac{\delta x}{x} = \alpha.\frac{\delta a}{a_i} + \beta.\frac{\delta b}{b_i} + \gamma.\frac{\delta c}{c_i}}$$

2 - Erreur

a) Définition

Erreur absolue :

Soit une grandeur x, sa valeur exacte x_E, la valeur donnée x_D. L'erreur absolue sur x est

$$\boxed{\delta x = x_D - x_E}$$

C'est une grandeur algébrique de même dimension que x.

Erreur relative sur x :

L'erreur relative sur x est

$$\boxed{\frac{\delta x}{x} = \frac{x_D - x_E}{x_E}}$$

Si l'erreur est faible, $\frac{\delta x}{x} \approx \frac{x_D - x_E}{x_D}$. Cette grandeur algébrique sans dimension est donnée en pourcentages.

b) Exemple

On mesure une longueur L avec un réglet métallique dont les graduation (l_0 = 1cm) ont été faites à 0°C alors que la règle est utilisée à la température θ_1.

$$L_D = k \text{ graduations} = k \text{ cm} = k.l_0$$
$$L_E = k.l_0.(1 + a.\theta_1) \text{ cm} = k.(1 + a.\theta_1)$$

Erreur absolue :

$\delta L = -k.l_0.a.\theta_1$

Si $\theta_1 > 0$ alors $\delta L < 0$

Erreur relative :

$$\frac{\delta L}{L} = -\frac{k.l_0.a.\theta_1}{L_E} = -\frac{k.l_0.a.\theta_1}{L_D} = -a.\theta_1$$

c) Calcul d'erreur dans deux cas simples

Cas 1 $x = \alpha.a + \beta.b + \gamma.c$:

Avec α, β, γ constantes fixes et a, b, c grandeurs comportants les erreurs absolue δa, δb, δc, l'erreur absolue vaut :

$$\boxed{\delta x = \alpha.\delta a + \beta.\delta b + \gamma.\delta c}$$

Cas 2 : $x = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$

Si $x = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$ et que les erreurs relatives sur a, b, c sont petites devant 1, l'erreur relative sur x est :

$$\boxed{\frac{\delta x}{x} = \alpha.\frac{\delta a}{a_i} + \beta.\frac{\delta b}{b_i} + \gamma.\frac{\delta c}{c_i}}$$

3 - Incertitudes

a) Définition

Soit une grandeur x, x_E sa valeur exacte et x_M sa valeur mesurée. L'erreur commise sur x, $\delta x = x_M - x_E$ est généralement inconnue, mais on peut la majorer. En valeur absolue,

$$\boxed{|\delta x| \leq \Delta x}$$

Où Δx est l'incertitude absolue sur x. L'incertitude a la même dimension que x mais est toujours positive. L'incertitude relative sur x :

$$\boxed{\frac{\Delta x}{x} = \frac{\delta x}{x_E} \approx \frac{\delta x}{x_M}}$$

b) Incertitude sur une mesure indirecte

1er cas : si $x = \alpha.a + \beta.b + \gamma.c$

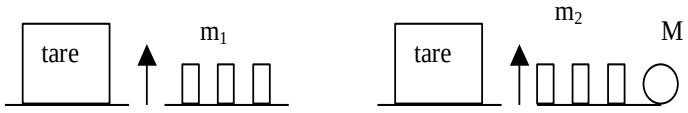
a, b et *c* sont des grandeurs mesurées, indépendantes les unes par rapport aux autres, avec des incertitudes absolues Δa, Δb, Δc. α, β, γ sont des constantes parfaitement connues. On admet que l'incertitude absolue sur *x* est :

$$\boxed{\Delta x = |\alpha|.\Delta a + |\beta|.\Delta b + |\gamma|.\Delta c}$$

ex : $M = m_1 - m_2$

$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$

$\Delta M = 2.\Delta m$



Remarque : il faut que les mesures soient indépendantes les unes des autres.

2ème cas : si $x = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$

α, β, γ sont des constantes connues. *a, b, c* sont des mesures indépendantes avec des incertitudes relatives $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$. On admet que l'incertitude relative sur *x* est

$$\boxed{\frac{\Delta x}{x} = |\alpha|.\frac{\Delta a}{a} + |\beta|.\frac{\Delta b}{b} + |\gamma|.\frac{\Delta c}{c}}$$

Remarque : il faut que $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$ et $\frac{\Delta c}{c} \ll 1$

c) Présentation du résultat d'une mesure

$X = (x_M \pm \Delta x).10^{\alpha}$ unités

$1 \leq x_M < 10$

α est un entier positif, négatif ou nul

L'incertitude Δx est donnée avec 1 ou 2 chiffres significatifs, mais **jamais plus.** Le nombre de chiffres donnés pour x_M doit être cohérent avec la valeur de Δx. Le dernier chiffre précisé pour x_M doit avoir le même rang que le chiffre (ou le deuxième chiffre) de Δx.

Ex : résistance de 4700 Ω à 10 % près

ΔR = 470 Ω ou ΔR = 500 Ω

$R = (4.7\cancel{00} \pm 0.5).10^3\ \Omega$

d) Comparaison de deux résultats expérimentaux

On peut vérifier légalité entre deux grandeurs si leurs domaines d'incertitude ont une partie commune

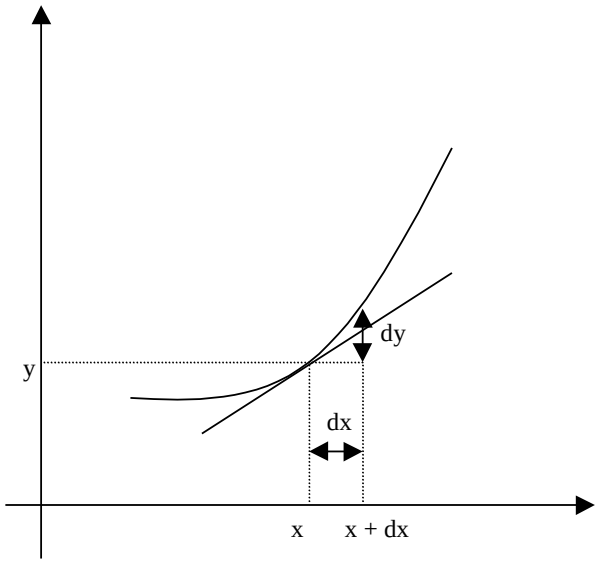
C - DIFFERENTIELLES, CALCULS D'INCERTITUDES ET DEVELOPPEMENTS LIMITES

1 - Fonction d'une variable

a) Différentielle

on pose *y*, fonction d'une variable *x*, continue, dérivable, … La différentielle de *y* est définie par $dy = y'.dx$, où *y'* est la dérivée de *y*, et *dy* est fonction de deux variables *x* et *dx*.

Interprétation graphique :



Si *dx* est petit, *dy* peut être confondu avec la variation de *y* lorsque *x* varie de *dx*.

Notation de la dérivée :

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

b) Petite variation

Si *x* subit une variation δx 'petite', *y* subit une variation δy qui est telle que $\delta y \approx \delta x.y'$. On confond la courbe *y*(*x*) et sa tangente.

Ex : Soit la surface d'une sphère $S = 4.\pi.R^2$ *de rayon R = 1m. Quel est la variation de S lorsque son rayon varie de* δR *= 1mm.*

$S + \delta S = 4.\pi.(R + \delta R)^2$

$\delta S = 8.\pi.R.\delta R + 4.\pi.(\delta R)^2$

$dS = 8.\pi.R.dR$

On peut confondre δS *avec* $8.\pi.R.\delta R$ *si* $4.\pi.(\delta R)^2 \ll 8.\pi.R.\delta R$*, ie si* $\delta R \ll 2R$.

c) Dérivée et différentielle logarithmique

La dérivée logarithmique de *y* est la dérivée de ln(*y*) par rapport à *x*

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{y'}{y}$$

Différentielle logarithmique :

$Y = \ln y$

$dY = Y'.dx = \frac{y'}{y}.dx = \frac{dy}{y}$

$$\boxed{d(\ln y) = \frac{dy}{y}}$$

2 - Fonction de plusieurs variables

a) Dérivée partielle

Soit *u* une fonction des variables *x*, *y* et *z*. La dérivée partielle de *u* par rapport à *x* est la fonction obtenue en dérivant *u* par rapport à *x*, les variables *y* et *z* étant considérée comme constante.

Ex : $u = x^2.\sin y - y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2.x.\sin y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2.\cos y - 1$

$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = 2.x.\cos y$

$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = 2.x.\cos y$

On démontre que si *u* est une bonne fonction,

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

que l'on note

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y}$$

b) Différentielle totale

La différentielle totale de u est définie par :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}.dx + \frac{\partial u}{\partial y}.dy + \frac{\partial u}{\partial z}.dz$$

du est une fonction de 6 variables qui sont *dx, dy, dz, x, y* et *z*. du représente la variation de *u* lorsque *x, y* et *z* subissent des variations *dx, dy* et *dz* infiniment petites.

Ex : Soit un parallélépipède rectangle de dimensions x, y et z qui varient de δx, δy et δz. Quel est la variation du volume V = x.y.z ?

$\delta V = (x + \delta x).(y + \delta y).' z + \delta z) - x.y.z$

$\delta V = \underbrace{y.z.\delta x + x.z.\delta y + x.y.\delta z}_{Ordre\ 1\ en\ \delta x,\delta y\ et\ \delta z} + \underbrace{z.\delta x.\delta y + y.\delta x.\delta z + x.\delta y.\delta z}_{Ordre\ 2\ en\ \delta x,\delta y\ et\ \delta z} + \underbrace{\delta x.\delta y.\delta z}_{Ordre\ 3\ en\ \delta x,\delta y\ et\ \delta z}$

En ne tenant compte que des termes d'ordre 1, on peut écrire :

$\delta V = y.z.\delta x + x.z.\delta y + x.y.\delta z$

Or $dV = \frac{\partial V}{\partial x}.dx + \frac{\partial V}{\partial y}.dy + \frac{\partial V}{\partial z}.dz$

Si les variations de x, y et z sont petites devant x, y et z, on peut confondre la variation de V et sa différentielle totale.

c) Théorème de Schwartz

Soient trois fonctions $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ et $R(x, y, z)$. A quelle condition $P.dx + Q.dy + R.dz$ est-elle une différentielle d'une fonction $f(x, y, z)$?

On suppose que *f* existe $df = P.dx + Q.dy + R.dz$

Mais $df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \frac{\partial f}{\partial z}.dz$

D'où $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial f}{\partial z}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \end{array}}$$

Ces relations sont vraies si *f* existe. On admet que si elles sont vraies, alors *f* existe.

Théorème de Schwartz : $P.dx + Q.dy + R.dz$ est la dérivée totale d'une différentielle ssi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

Ex : $y.z.dx + x.z.dy + x.y.dz$ est une différentielle totale ? Si oui, de quelle fonction ?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = z, \frac{\partial Q}{\partial x} = z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = x, \frac{\partial R}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = y, \frac{\partial P}{\partial z} = y$$

La fonction f existe donc.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y.z \Rightarrow f = x.y.z + \varphi(y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x.z = x.z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow f = x.y.z + \varphi(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x.y = x.z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow f = x.y.z + \varphi_0 \end{cases}$$

Ex : même question pour $3.x^2.y.dx + x^3.dy + 2.y^2.z.dz$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3.x^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = 3.x^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial y} = 4.y.z$$

Ce n'est donc pas la différentielle d'une fonction f. On dit que $\delta f = 3.x^2.y.dx + x^3.dy + 2.y^2.z.dz$ est une forme différentielle.

d) Différentielle

Soit une fonction $u(x,y,z)$. La différentielle logarithmique de *u* est la différentielle de $\ln u$.

$$\boxed{d(\ln u) = \frac{du}{u}}$$

Cas particulier : $u = a.x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}$

$$\boxed{\frac{du}{u} = \alpha.\frac{dx}{x} + \beta.\frac{dy}{y} + \gamma.\frac{dz}{z}}$$

3 - Calcul d'incertitude

a) Incertitude absolue sur une mesure indirecte

Une grandeur *u* que l'on cherche à déterminer est fonction de plusieurs grandeurs *x*, *y* et *z*. Ces trois grandeurs sont mesurées avec des incertitudes absolues Δx, Δy et Δz. Quelle est l'incertitude relative Δu sur *u* ? *x*, *y* et *z* sont mesurées avec des erreurs δx, δy et δz supposées petites devant *x*, *y* et *z*. L'erreur δu sur *u* peut être confondue avec la différentielle de *u*.

$$\delta x = \frac{\partial u}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}.\delta z$$

Or $|\delta x| \leq \Delta x$, $|\delta y| \leq \Delta y$ et $|\delta z| \leq \Delta z$.

δx, δy et δz sont indépendantes et de signes quelconques et inconnus.

$$\boxed{\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|.\Delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|.\Delta y + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|.\Delta z}$$

Ex : $u = a + \alpha.x + \beta.y + \gamma.z$

α, β, γ et a sont des constantes parfaitement connues

$$\boxed{\Delta u = |\alpha|.\Delta x + |\beta|.\Delta y + |\gamma|.\Delta z}$$

b) Incertitude relative sur une mesure indirecte

L'erreur relative sur *u* est notée $\frac{\delta u}{u}$

Si les erreurs sont petites, on peut confondre l'erreur relative et la différentielle $\frac{du}{u} = d(\ln u)$

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{du}{u} = \frac{\partial(\ln u)}{\partial x}.dx + \frac{\partial(\ln u)}{\partial y}.dy + \frac{\partial(\ln u)}{\partial z}.dz$$

D'où l'incertitude relative sur *u* si *x*, *y* et *z* sont indépendantes :

$$\boxed{\frac{\Delta u}{u} = \left|\frac{\partial(\ln u)}{\partial x}\right|.\Delta x + \left|\frac{\partial(\ln u)}{\partial y}\right|.\Delta y + \left|\frac{\partial(\ln u)}{\partial z}\right|.\Delta z}$$

Cas intéressant : $u = a.x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}$

α, β, γ et *a* sont des constantes parfaitement connues.

$$\boxed{\frac{\Delta u}{u} = \left|\frac{\alpha}{x}\right|.\Delta x + \left|\frac{\beta}{y}\right|.\Delta y + \left|\frac{\gamma}{z}\right|.\Delta z}$$

c) Exemple

Cas 1 : $R = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}.\frac{\Delta R_2}{R_2}$$

Cas 2 : $G_{dB} = -20.\log Q$, avec $Q = \frac{1}{R}.\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{2}.\frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2}.\frac{\Delta C}{C}$$

Cas 3 : $n = \frac{\sin i}{\sin r}$

$$\frac{\Delta n}{n} = \left|\frac{\cos i}{\sin i}\right| . \Delta i + \left|\frac{\cos r}{\sin r}\right| . \Delta r$$

Ceci est vrai si *i* et *r* sont en radians, de même que Δi et Δr.

4 - Développement limité

f est une fonction de la variable *x*, dérivable un grand nombre de fois.

$$df = \frac{df}{dx} . dx = f' . dx$$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0) +$ terme de l'ordre de $(x - x_0)^2$ noté $O(x - x_0)^2$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h . f'(x_0) + O(h^2)$$

On a une meilleur précision sur la variation de f lorsque x varie de x_0 à $x_0 + h$ avec le développement limité (en série de Taylor).

$$\boxed{f(x_0 + h) - f(x_0) = h.\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} + \frac{h^2}{2!}.\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x_0} + \frac{h^3}{3!}.\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_{x_0} + \cdots + \frac{h^n}{n!}.\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x_0} + O(h^{n+1})}$$

Si $x_0 = 0$, $x_0 + h = x$

$$f(x) = f(0) + x.\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}.\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_0 + O(x^{n+1})$$

Exemple : $(1 + x)^n$ *au voisinage de 0 (x << 1)*

$$(1 + x)^n = 1 + n.x + n.(n - 1).\frac{x^2}{2} + n.(n - 1).(n - 2).\frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

Mapple : Développement limité = Taylor (*f*(*x*), *x*=x_0, *n*+1) donne le développement limité de *f*(*x*) au voisinage de x_0 avec $O(x^{n+1})$

Quelques développements limités au voisinage de 0

$\sin x = x + O(x^3)$ (la fonction sinus est impaire)

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$(1 + x)^n = 1 + n.x + O(x^2)$